3 SPOJITOST FUNKCE

Definice. Funkci $y = f(x)$ nazveme spojitou v bodě x_0, jestliže:

1. je v bodě x_0 definovaná,
2. má v bodě x_0 limitu,
3. limita v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě,

tj. jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funkce je spojitá v bodě x_0 zprava, jestliže $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Funkce je spojitá v bodě x_0 zleva, jestliže $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Funkce je spojitá v intervalu (a, b), je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě.

Funkce je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, jeli spojitá v každém jeho vnitřním bodě, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost dává do souvislosti limitu v bodě a funkční hodnotu v tomto bodě. Pokud obě existují a jsou stejné, je daná funkce v uvažovaném bodě „pěkná“.

Podle definice je tedy funkce spojitá v bodě x_0 , právě když pro hodnoty x blízké číslu x_0 se hodnota $f(x)$ „velmi málo liší“ od $f(x_0)$. To u elementárních funkcí odpovídá naší představě o tom, že graf spojité funkce je čára nakreslená plynulým nepřerušovaným tahem.

Věta. Elementární funkce a funkce, které vznikly jejich sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Bod, ve které není funkce spojitá, se nazývá bod nespojitosti.

Vzniká tam, kde není splněna některá podmínka (1) – (3) z definice.

Věta (vlastnosti spojitých funkcí).
Je-li funkce $y = f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak:

1. Je na něm ohraničená, tj. existují čísla K, L taková, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $K \leq f(x) \leq L$.
2. V něm nabývá své nejmenší a největší hodnoty (Weierstrass).
3. Je-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c)=0$.
   (Bolzáno 5.10.1781 – 18.12.1848)

Věta. Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 (na intervalu) derivaci, pak je v bodě x_0 (na intervalu) spojitá.

Obrácená věta neplatí, tj. funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.

Poznámka. Bolzáno zkonstruoval funkci, která je spojitá na **R**, ale nemá v žádném bodě derivaci (vlastní). Její graf nelze nakreslit. Tvrzení, že graf spojité funkce lze nakreslit jedním tahem tedy obecně neplatí.