8 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých rozumíme soustavu

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Čísla a_{ij} se nazývají koeficienty.
$b_1, b_2, \ldots, b_m$ se nazývají absolutní členy (pravé strany)
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé

Je-li $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ nazývá se soustava homogenní.
Je-li alespoň jedno $b_j \neq 0$, nazývá se soustava nehomogenní.

Řešením soustavy nazveme každou uspořádanou *n*-tici reálných čísel, která po dosazení za neznámé převedou každou rovnici v rovnost.

Věta. Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí soustavy.

Matici

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme rozšířená matice soustavy.

Soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b},$$

kde A je matice soustavy $\quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Dvě soustavy lineárních rovnic o stejném počtu neznámých, které mají tatáž řešení se nazývají ekvivalentní.

Věta. Soustavu lineárních rovnic $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ převedeme v soustavu ekvivalentní, jestliže:

1. Zaměníme pořadí rovnic.
2. Libovolnou rovnici vynásobíme číslem různým od nuly.
3. K libovolné rovnici přičteme lineární kombinaci ostatních rovnic.
4. Vynecháme rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

Poznámka. Jedná se o úpravy, které nemění hodnost matice.

Věta Frobeniova. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.

$$h(A) = h(A_r).$$

Hodnost rozšířené matice soustavy určíme převedením na schodovitý tvar.

Je-li $h(A) = h(A_r) = h$ …. má soustava rovnic řešení

$h = n$ …. má právě jedno řešení

$h < n$ …. má nekonečně mnoho řešení,

které tvoří h tzv. hlavních neznámých a $(n\text{-}h)$ tzv. volných (volitelných) neznámých neboli parametrů. Za hlavní neznámé bereme zpravidla ty, které odpovídají nenulovým začátkům schodovitého tvaru matice soustavy.

METODY ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

1. **Gaussova eliminační metoda** – rozšířenou matici soustavy převádíme na schodovitý tvar

2. **Cramerovo pravidlo**
   Soustava lineárních rovnic $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$, ve které počet rovnic se rovná počtu neznámých, tj. $m = n$ a determinant matice soustavy $\det A \neq 0$, má právě jedno řešení tvaru

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

kde $D = \det A$ a D_i získáme tak, že v $\det A$ nahradíme i – tý sloupec sloupcem pravých stran soustavy $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$.