

## 4. UŽITÍ DERIVACÍ

### 4. 1. Monotonnost funkce. Lokální extrémý

**Věta.** Necht' funkce  $y = f(x)$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci, pak platí:

1. Funkce  $y = f(x)$  je konstantní na  $\langle a, b \rangle$ , právě když  
 $f'(x) = 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ .
2. Funkce  $y = f(x)$  je rostoucí na  $\langle a, b \rangle$ , právě když  
 $f'(x) > 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ .
3. Funkce  $y = f(x)$  je klesající na  $\langle a, b \rangle$ , právě když  
 $f'(x) < 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ .

Říkáme, že funkce  $y = f(x)$  má v bodě  $x_0$  (v němž je definována):

**lokální maximum**, jestliže pro každé  $x$  z ryzího okolí bodu  $x_0$  platí  $f(x) < f(x_0)$ ,

**lokální minimum**, jestliže pro každé  $x$  z ryzího okolí bodu  $x_0$  platí  $f(x) > f(x_0)$ .

Lokální maximum }  
Lokální minimum }  $\Leftrightarrow$  **Lokální extrémý**

Je-li  $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$  je v bodě  $x_0$  rostoucí  
 NEBO  $\Rightarrow$   
 $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$  je v bodě  $x_0$  klesající

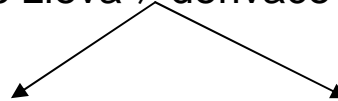
$\Rightarrow f(x)$  nemá v bodě  $x_0$  lokální extrém.

Funkce  $y = f(x)$  může mít tedy lokální extrém v takovém bodě

$x_0$ , kde  $f'(x_0) = 0$  ..... **stacionární body**

$f'(x_0)$  neexistuje  $\Leftrightarrow f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$

derivace zleva  $\neq$  derivace zprava



vlastní derivace  
**úhlové body**

nevlastní derivace  
**body vratu**

**Kriterium 1.** Necht'  $f(x)$  je v bodě  $x_0$  spojitá a necht'  $f'(x_0) = 0$  nebo  $f'(x_0)$  **neexistuje**. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu  $x_0$  tak, že funkce  $f'(x)$  v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu  $x_0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  **lokální extrém**.

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  nabývá v něm své největší a nejmenší hodnoty .... tzv. **absolutní extrémy**.

Absolutní extrém tedy nastane buď v bodě lokálního extrému nebo v krajním bodě intervalu.

## 4.2 Konvexnost, konkávnost. Inflexní body

Nechť funkce  $y = f(x)$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci, pak:

1. Funkce  $y = f(x)$  je **konvexní** neboli nad tečnou v  $(a, b)$ , právě když  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ .
2. Funkce  $y = f(x)$  je **konkávní** neboli pod tečnou v  $(a, b)$ , právě když  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ .

Bod, ve kterém existuje ke grafu funkce právě jedna tečna a v němž přechází graf funkce z konvexity do konkávnosti, tj. z jedné strany tečny na druhou se nazývá **inflexní bod**.

Je-li  $f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$  je v bodě  $x_0$  konvexní  
NEBO  $\Rightarrow$   
 $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$  je v bodě  $x_0$  konkávní

$\Rightarrow f(x)$  nemá v bodě  $x_0$  inflexní bod.

Funkce  $y = f(x)$  může mít tedy **inflexní bod** v takovém bodě  $x_0$ , kde  $f''(x_0) = 0$  nebo kde  $f''(x_0)$  neexistuje.

**Kriterium 2.** Nechť funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  spojitou první derivaci a nechť  $f''(x_0) = 0$  nebo  $f''(x_0)$  neexistuje. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu  $x_0$  tak, že funkce  $f''(x)$  v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu  $x_0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  inflexní bod.

**Kriterium 3.** Necht'

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Je-li  $n \geq 1$  sudé a  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , má  $f(x)$  v bodě  $x_0$  **lokální min.**

$f^{(n)}(x_0) < 0$ , má  $f(x)$  v bodě  $x_0$  **lokální max.**

Je-li  $n \geq 2$  liché, má  $f(x)$  v bodě  $x_0$  inflexní bod.