6. MATICE

6. 1 Definice

Nechť m,n jsou přirozená čísla. Množinu $m \cdot n$ čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců nazýváme maticí typu (m, n).

Píšeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nebo zkráceně $A = \left\| a_{i\,j} \right\|_{m,n}$ kde i = 1, 2, …, n,
j = 1, 2, …, m.

Čísla a_{ij} se nazývají prvky matice.

Pro sloupce a řádky užíváme společný název řada.

Matice, u níž $m = n$, se nazývá čtvercová matice řádu n. Je-li $m \neq n$, hovoříme o obdélníkové matici typu (m, n).

Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33}, … tvoří hlavní diagonálu.

Prvky $a_{m,1}$, $a_{m-1,\,2}$, $a_{m-2,\,3}$, …tvoří vedlejší diagonálu.

6. 2 Některé zvláštní matice

Černá. Matematika. Lineární algebra. str. 22 - 24.

Matice stupňová ↔ schodovitá
je matice, ve které každý řádek začíná větším počtem nul než řádek předcházející.

Př.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

6. 3 Početní operace s maticemi

Nechť jsou dány matice $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n}$ a $B = \left\| b_{ij} \right\|_{m,n}$ téhož typu (m, n) a reálné číslo α.

Potom definujeme:

1. $A = B$, právě když $a_{ij} = b_{ij}$
2. $A \pm B = \left\| a_{ij} \pm b_{ij} \right\|$
3. $\alpha \cdot A = \left\| \alpha \cdot a_{ij} \right\|$

Př.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & \cos\pi \\ 4 & \sin\frac{\pi}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A = B, A ≠ C, A ≠ D, C ≠ D

$\frac{1}{2}A - 3D =$

C + D = není definováno

Pro počítání s maticemi platí:

$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$ ….. komutativní zákon

A + B = B + A ….. komutativní zákon

A + (B + C) = A + (B + C) ….. asociativní zákon

$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\,\beta)\,A$ ….. asociativní zákon

Příklad. Str. 25, Př. 3.12

Str. 26, Př. 3.13, 3.14 a 3.15

6. 4 Hodnost matice

Pro řádek a sloupec matice užíváme společný název řada. Takováto řada je vlastně uspořádaná n-tice čísel, tj. vektor. Na rovnoběžné řady matice lze tedy pohlížet jako na vektory téže dimenze.

Definice. Hodnost nenulové matice je přirozené číslo, které udává počet lineárně nezávislých řad matice.

Hodnost nulové matice je rovna nule.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost se nazývají ekvivalentní.

Věta. Hodnost matice se nezmění, jestliže provedeme některou z následujících ekvivalentních úprav:

1. matici transponujeme,
2. zaměníme pořadí rovnoběžných řad,
3. vynásobíme prvky libovolné řady číslem různým od nuly,
4. k libovolné řadě přičteme lineární kombinaci rovnoběžných řad,
5. vynecháme řadu se samých nul,
6. vynecháme řadu, která je lineární kombinací rovnoběžných řad.

Úpravy (4) a (6) používáme zpravidla v tomto speciálním tvaru:

4*. K libovolné řadě přičteme násobek rovnoběžné řady.

6*. Vynecháme řadu, která je násobkem rovnoběžné řady.

Hodnost matice určíme tak, že ji pomocí ekvivalentních úprav převedeme na schodovitý tvar.

Věta. Nenulové řádky schodovité matice jsou lineárně nezávislé.

Věta. Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků schodovitého tvaru.

Př.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{takže } h(A) = 3$$

Cvičení. Str. 37 - 38