7. DETERMINANTY

7. 1 Definice

Determinantem n-tého řádu je číslo, které je podle určitého pravidla přiřazeno čtvercové matici n-tého řádu.

Značíme ho

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nalezení tohoto čísla nazýváme vyčíslením determinantu.

Vyčíslení determinantu 1. řádu.

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Vyčíslení determinantu 2. řádu … křížové pravidlo.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Vyčíslení determinantu 3. řádu … Sarrusovo pravidlo.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Příklad. Str. 44 – Př. 5.4

Cvičení. Str.45 – 47, př. 1 -9, 18 – 26, 33 – 35.

7. 2 Vlastnosti determinantů

1. det A = det A^T
2. Zaměníme-li v determinantu dvě rovnoběžné řady, změní determinant znaménko.
3. Determinant je roven nule, jestliže:
   a) jsou prvky jedné řady rovny nule,
   b) jsou dvě rovnoběžné řady shodné,
   c) je-li některá řada násobkem řady rovnoběžné.
4. Vynásobíme-li prvky libovolné řady det A číslem $\alpha \neq 0$, dostaneme det B, pro který platí

   $$\det B = \alpha \det A.$$

5. Přičteme-li k libovolné řadě determinantu násobek řady s ní rovnoběžné hodnota determinantu se nezmění.
6. Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.

7. 3 Vyčíslení determinantů 4. a vyššího řádu

Subdeterminantem přidruženým k prvku a_{ij} **det A** je determinant **det A$_{ij}$** , který vznikne z **det A** vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Př.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{....}\ a_{32}\ \text{.....}\quad \det A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Algebraickým doplňkem prvku a_{ij} **det A** je číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Př.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{.....}\ a_{21}\ \text{.....}\quad A_{21} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

Věta. Determinant je roven součtu součinů prvků libovolné řady a jejich algebraických doplňků.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$